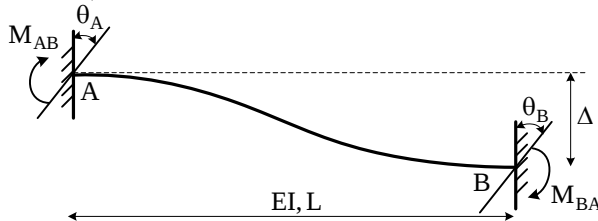




تحلیل سازه‌های نامعین: روش‌های مناسب در تحلیل سازه‌های نامعین عبارتند از "شیب افت، روش سازگاری تغییر شکل‌ها قضایای کاستیلیانو، روش پخش لنگر و روش سه لنگری" در نوبت قبلی به بررسی روش سازگاری تغییر شکل‌ها پرداختیم. حالا روش شیب افت را مرور می‌کنیم:

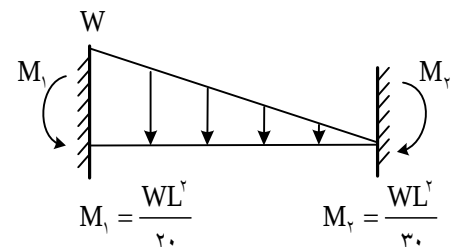
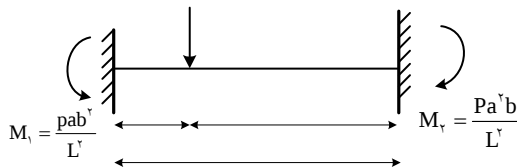
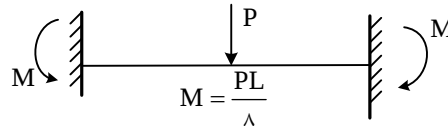
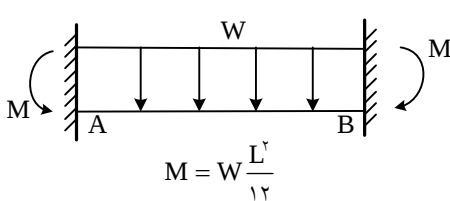


- معادلات شیب افت:

$$\begin{cases} M_{AB} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L}) + \bar{M}_{AB} \\ M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L}) + \bar{M}_{BA} \end{cases}$$

- در روابط فوق $\bar{M}_{AB}$ و $\bar{M}_{BA}$ به ترتیب لنگرهای گیرداری بارگذاری مورد نظر در تکیه‌گاه‌های A و B می‌باشد. θ_A و θ_B دوران گره A و B و Δ تغییر مکان نسبی A و B می‌باشد.

- لنگرهای گیرداری چند بارگذاری خاص عبارتند از:

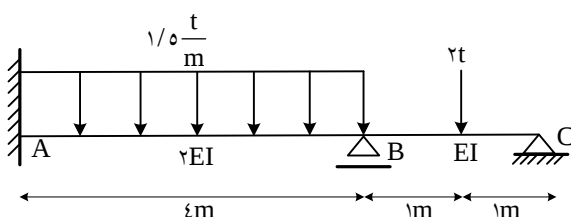


- معادله شیب افت اصلاح شده:

اگر تکیه‌گاه خارجی در یک تیر سراسری، ساده باشد معادلات شیب افت به صورت زیر اصلاح خواهند شد:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} \left(\theta_A - \frac{\Delta}{L} \right) + \bar{M}_{AB} - \frac{1}{2} \bar{M}_{BA}$$

- با توجه به معادله فوق، در حالت تیر یکسر گیردار، یک سر مفصل در بارگذاری‌های متقارن، لنگر گیرداری انتهای گیر دار ۱/۵ برابر حالت دو سر گیردار است.



مثال) در سازه زیر θ_C را به دست آورید:





$$M_{BC} = \frac{rEI}{l} \left(\theta_B - \frac{\Delta}{l} \right) + \bar{M}_{BC} - \frac{1}{r} \bar{M}_{CB} \Rightarrow M_{BC} = \frac{rEI}{r} (\theta_B) + \left(-\frac{r \times r}{8} - \frac{1}{r} \times \frac{r \times r}{8} \right) = 1/5 EI \theta_B - 0.75$$

$$M_{BA} = \frac{r(2EI)}{4} (2\theta_B) + \frac{1/5 \times r^2}{12} = 2EI \theta_B + 2$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 3/5 EI \theta_B + 1/25 = 0 \Rightarrow \theta_B = -\frac{0.357}{EI}$$

$$M_{CB} = EI(\theta_B + 2\theta_C) + 0.5 = 0 \Rightarrow \theta_C = -\frac{0.714}{EI}$$

$$n_C = 3j + c - r$$

$$n_C = 6j + c - r$$

- در قاب‌های صفحه‌ای درجه نامعینی سینماتیکی برابر است با:

و در قاب‌های فضایی درجه نامعینی سینماتیکی برابر است با:

که روابط فوق j تعداد گره‌ها، c تعداد معادلات شرط و r تعداد قیدهای تکیه‌گاهی می‌باشد.

- هر گره یک درجه آزادی دورانی دارد. (بجز مفصل‌ها که دو درجه آزادی دورانی دارند). در طرفین یک مفصل برشی هم دو درجه آزادی

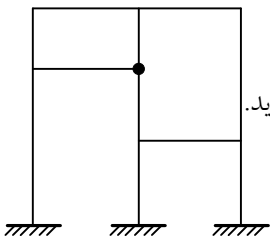
انتقالی داریم. اگر از تغییر مکان‌های محوری اعضا صرف‌نظر شود، درجات نامعینی انتقالی برابر است با تعداد میله‌هایی که باید به سازه مفصلی

شده اضافه نمود تا پایدار شود. در ضمن به یاد داشته باشید که در اعضای صلب درجه آزادی دورانی با درجه آزادی انتقالی رابطه دارد (و از

هم مستقل نیستند)



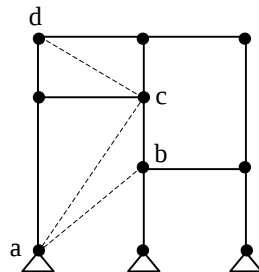
مثال) اگر از تغییر طول محوری اعضا صرف‌نظر شود، درجه نامعینی سینماتیکی سازه مقابل را به دست آورید.



طبق نکات ذکر شده، سازه ۸ درجه آزادی دورانی دارد (۶ گره صلب و ۱ گره مفصلی)



برای به دست آوردن درجه نامعینی انتقالی تمام گره‌های سازه را مفصل می‌کنیم:



با افزودن ۳ میله ac, ab و cd سازه پایدار می‌شود پس با صرف‌نظر

از تغییر شکل‌های محوری، ۳ درجه آزادی انتقالی داریم.



مثال) (کنکور ارشد ۸۴): در تیر شکل مقابل تحت نشست‌های

تکیه‌گاهی نشان داده شده M_{ab} چقدر است؟

$$\frac{6EI\delta}{L^2} \quad (2) \quad \frac{8EI\delta}{L^2} \quad (1)$$

$$\frac{rEI\delta}{L^2} \quad (4) \quad \frac{4EI\delta}{L^2} \quad (3)$$



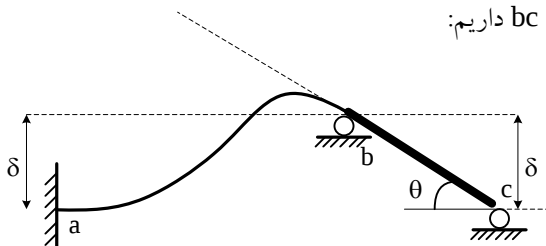
با توجه به تغییر شکل سازه و با توجه به رابطه θ و δ در تیر صلب bc داریم:

$$\delta = l\theta \rightarrow \theta = \frac{\delta}{l}$$

$$ab: M_{ab} = \frac{rEI}{l} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{r\Delta}{l} \right)$$

$$= \frac{rEI}{l} \left(0 + \left(\frac{-\delta}{l} \right) - \frac{r\delta}{l} \right) = \frac{-8EI}{l^2} \delta$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



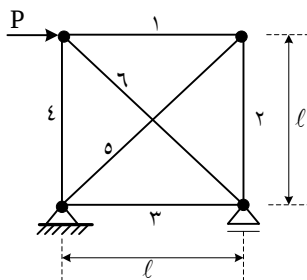


روش مداخل کا:

در این روش، به تعداد درجات نامعینی سازه، مجهول می‌گیریم. و با نوشتن معادلات نیروی محوری (در خرپاها) و لنگر خمشی (در قاب‌ها) صرف‌نظر از اثر نیروی برشی و محوری، از روابط زیر مجهولات به دست می‌آیند:

$$\sum_{i=1}^k \frac{N_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial X_i} \right) l_i}{(EA)_i} = 0 \quad (\text{در خرپاها})$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{M \left(\frac{\partial M}{\partial X_i} \right) dx}{EI} = 0 \quad (\text{در قاب‌ها})$$

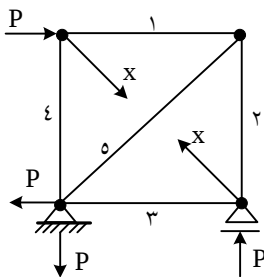


مثال) خرپای زیر را تحلیل کنید:



$$n = m + r - 2j = 6 + 3 - 2(4) = 1$$

چون سازه یک درجه نامعین است. یک مجهول نیاز داریم. این مجهول می‌تواند یکی از عکس‌العمل‌ها و یا نیروی داخلی یکی از اعضا باشد. با مجهول گرفتن نیروی عضو ۶ و نوشتن نیروهای سایر اعضا، بر حسب این مجهول داریم:



$$F_1 = -p - \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

$$F_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} x$$

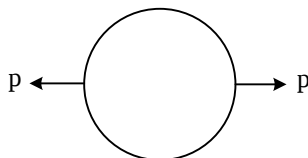
$$F_2 = -p - \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

$$F_4 = \sqrt{2} p + x$$

$$F_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} x$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{N_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) l_i}{EA} = 0 \Rightarrow 2 \frac{\left(-p - \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) l}{EA} + 2 \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} x \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) l}{EA} + \frac{(\sqrt{2} p + x)(1)(\sqrt{2} l)}{EA} + \frac{(x)(1)(\sqrt{2} l)}{EA} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} p \quad (\text{نیروی فشاری})$$

با به دست آمدن X (نیروی عضو ۶ ام) نیروی سایر اعضا هم به دست می‌آید.



مثال) نیروهای داخلی حلقه روبرو را به دست آورید:



(ثابت = EI, GA, fs, EA)

حالا اگر سازه‌ای خود به خود در حالت تعادل باشد، (بدون وجود هیچ‌گونه تکیه‌گاهی) داریم:

$$n = 3k - c \quad (\text{درجه نامعینی})$$

k: تعداد فضاهای بسته و c: تعداد معادلات شرط)

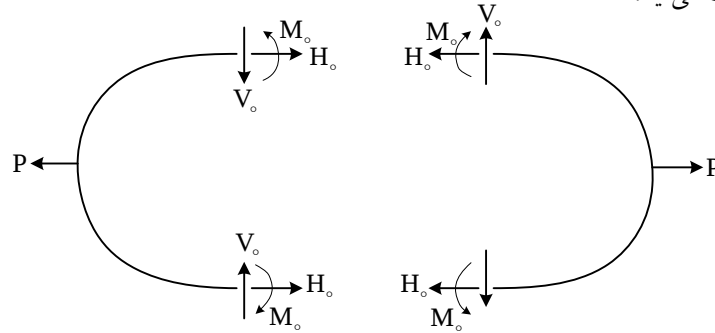
$$\Rightarrow n = 3 \times 1 - 0 = 3$$

پس سازه ۳ درجه نامعین است.

اگر حلقه را از وسط جدا کنیم، نیروهای داخلی حلقه در محل جدا شدن به صورت روبرو است.

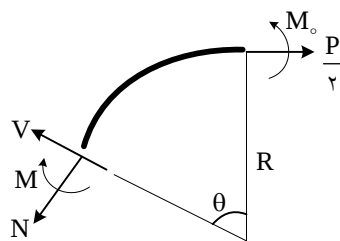
$$H_o = \frac{P}{2}$$

از تعادل افقی هر نیم حلقه به دست می‌آید:



با کمی دقت در شکل دیده می‌شود که نیروی V_o در نیم حلقه سمت چپ سعی در نزدیک کردن دو سر نیم حلقه و در نیم حلقه سمت راست سعی در دور کردن دو سر نیم حلقه نسبت به هم دارد که با هم سازگار نیستند. پس:

در نتیجه تنها مجهول، M_o است. پس با نوشتن معادلات حداقل کار و به دست آوردن M_o ، تمامی نیروهای داخلی حلقه به دست می‌آید: با مقطع زدن از یک نقطه دلخواه و به دست آوردن نیروهای داخلی داریم و

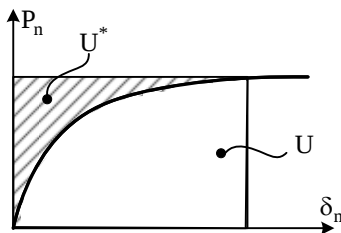


$$\begin{cases} M = M_o - \frac{PR}{2}(1 - \cos \theta) \\ V = \frac{P}{2} \sin \theta \\ N = \frac{P}{2} \cos \theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_o} = 0 \Rightarrow \int_1 \frac{M \left(\frac{\partial M}{\partial M_o} \right) ds}{EI} + \int_1 \frac{f_s V \left(\frac{\partial V}{\partial M_o} \right) ds}{GA} + \int_1 \frac{N \left(\frac{\partial N}{\partial M_o} \right) ds}{EA} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\left[M_o - \frac{PR}{2}(1 - \cos \theta) \right] (1)(R d\theta)}{EI} = 0 \Rightarrow M_o = PR \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

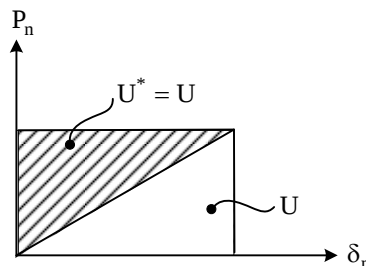
$$\frac{\partial U^*}{\partial p_n} = \delta_n$$



نکته: در قضیه دوم کاستیلیانو داریم:

که U^* مساحت انرژی مکمل است: در شکل روبرو برابر است با مساحت مستطیل منهای مساحت زیر منحنی $(P_n - \delta_n)$ (که معرف انرژی سیستم U است) تنها در صورتی که رابطه P_n بر حسب δ_n خطی باشد و U با هم برابرند و

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_n} = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n \quad \text{داریم:}$$



قضایای تقابل کار و تغییر مکان (بتی- ماکسول):

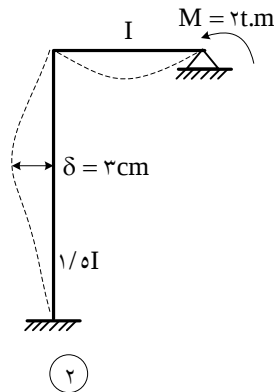
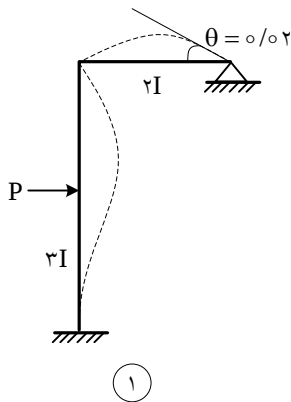
- کار انجام شده توسط نیروی P_1 (یا M_1) بر اثر تغییر مکان ناشی از نیروی P_2 (یا M_2) برابر است با کار انجام شده توسط نیروی P_2 (یا M_2) بر اثر تغییر مکان ناشی از نیروی P_1 (یا M_1).



- تغییر مکان در نقطه ۱ وقتی بار در نقطه ۲ است برابر است با تغییر مکان در نقطه ۲ وقتی همان بار در نقطه ۱ است.



مثال (کنکور ارشد ۸۴) با توجه به اشکال ۱ و ۲ مقدار p چقدر است؟



$$p = -1t \quad (1)$$

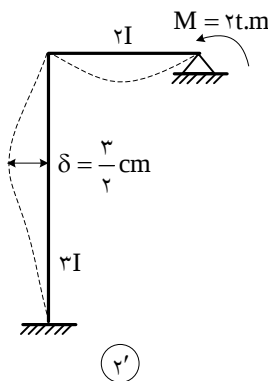
$$p = \frac{2}{3}t \quad (2)$$

$$p = \frac{4}{3}t \quad (3)$$

$$p = \frac{8}{3}t \quad (4)$$

✓ حل از آنجا که سختی دو سازه با هم متفاوت است بهتر است یکی از سازه‌ها را به لحاظ سختی معادل سازه دیگر نمود. در این

صورت، اگر سختی عضوی n برابر شود، تغییر مکان‌ها و چرخش‌های آن عضو $\frac{1}{n}$ برابر می‌شود. اگر سازه ۲ را معادل کنیم داریم:



حال با نوشتن رابط بیتی ماکسول بین سازه‌های ۱ و ۲' داریم:

$$p \times \left(-\frac{3}{2} \text{ cm}\right) = (2t.m)(-0.02 \text{ rad}) \Rightarrow p = \frac{8}{3}t$$

گزینه ۴ صحیح است.

مدلسازی با فنر:

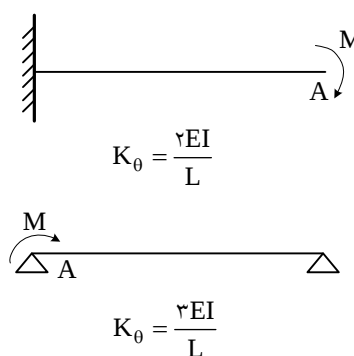
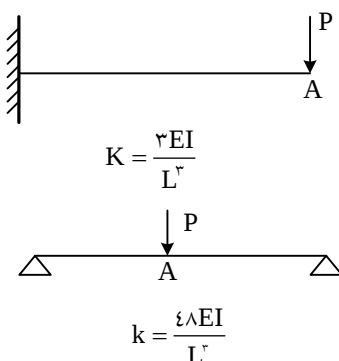
در این روش سختی‌های دورانی و انتقالی هر یک از اعضاء سازه به صورت یک فنر با سختی معادل تبدیل شده و با استفاده از ایده فنرهای سری و موازی تغییر مکان یا چرخش مورد نظر به دست می‌آید.

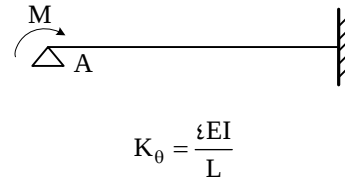
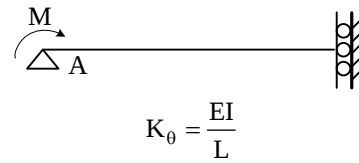
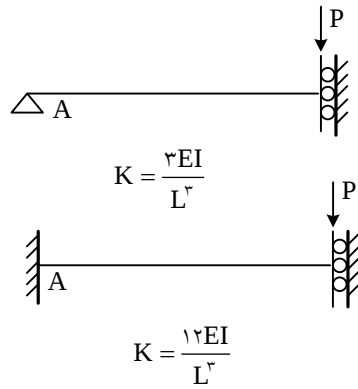
دو فنر موازیند اگر تغییر مکان یکسانی داشته باشند و سری هستند اگر نیروی یکسانی داشته باشند. نیرو در فنرهای موازی به نسبت سختی‌هایشان تقسیم می‌شود. سختی کل گره در حالت فنرهای موازی برابر با مجموع سختی‌های فنرهای معادل می‌باشد. و در حالت سری

$$\frac{1}{k_T} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i}$$

داریم:

- توصیه می‌شود، سختی‌های زیر را به خاطر بسپارید: (همه سختی‌ها مربوط به نقطه اعمال بار می‌باشند)

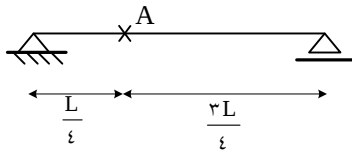




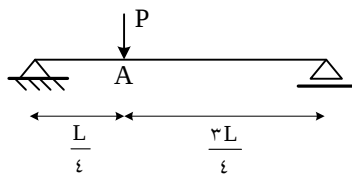
مثال) طول L را چنان بیابید که نسبت سختی دورانی به سختی انتقالی $\left(\frac{k_\theta}{k}\right)$ در



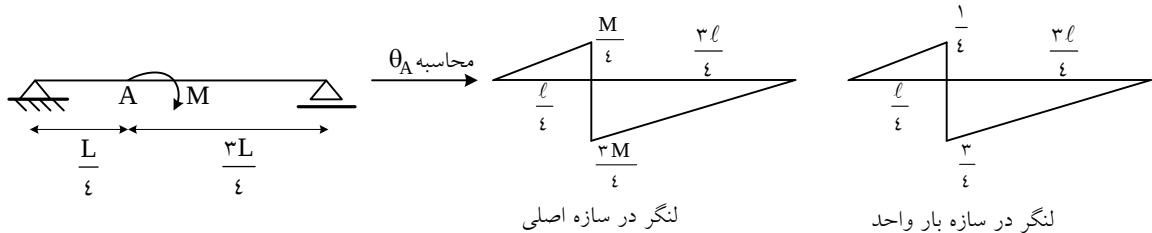
نقطه A از تیر زیر برابر با یک شود.



حلاً اولاً دقت کنید همواره سختی دورانی و انتقالی باید برای یک نقطه خاص تعریف شوند ثانیاً سختی انتقالی مقدار باری است که تغییر مکان متناظرش برابر واحد گردد و سختی دورانی در یک نقطه مقدار لنگری است که چرخش متناظرش برابر با واحد باشد.



$$\Delta_A = \frac{P \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2}{3EI} = \frac{3Pl^3}{256EI} \quad \frac{\Delta_A=1}{p \rightarrow k} \rightarrow k = \frac{256EI}{3l^3}$$



$$\Rightarrow \theta_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{EI} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3M}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{7MI}{48EI} \quad \frac{\theta_A=1}{M \rightarrow k_\theta} k_\theta = \frac{48EI}{7l}$$

$$\Rightarrow \frac{k_\theta}{k} = \frac{\frac{48EI}{7l}}{\frac{256EI}{3l^3}} = \frac{9}{112} l^2 \rightarrow l = \sqrt{\frac{112}{9}}$$

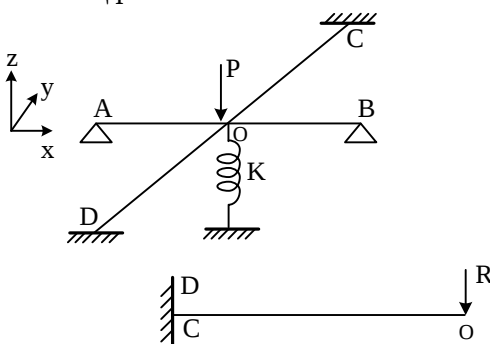


مثال) در سازه روبرو اگر در حالت ۱ گره O مفصل و در

حالت ۲ گره O صلب باشد، نسبت $\frac{(\Delta_o)_1}{(\Delta_o)_2}$ چقدر است؟ $\left(k = \frac{3EI}{l^3}\right)$

$$(OA = OB = OC = OD = L)$$

حل) در حالت ۱ اعضای OC و OD به صورت زیر مدل می‌شوند:



$$\rightarrow k = \frac{3EI}{l^3}$$

و اعضای دو سر مفصل OA و OC ، هیچ‌گونه سختی خمشی ندارند. $(k_{OA} = k_{OB} = 0)$

و از آنجا که مجموعه چهار میله و فنر در نقطه O یک تغییر مکان دارند، موازی می‌باشند و داریم:



$$\Rightarrow k_{TO} = 2 \times \frac{3EI}{l^3} + \frac{12EI}{l^3} = \frac{18EI}{l^3} \Rightarrow (\Delta_o)_1 = \frac{pl^3}{18EI}$$

در حالت ۲ اعضا به صورت زیر مدل می‌شوند: (به علت تقارن در جهت‌های x و y، نقطه O فقط تغییر مکان قائم دارد و چرخش ندارد)

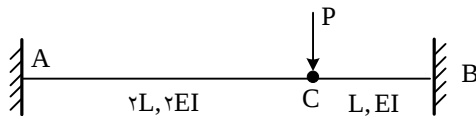


$$K = \frac{3EI}{L^3}$$

$$K = \frac{12EI}{L^3}$$

$$\Rightarrow k_{TO} = 2 \times \frac{3EI}{l^3} + 2 \times \frac{12EI}{l^3} + \frac{12EI}{l^3} = \frac{42EI}{l^3} \Rightarrow (\Delta_o)_2 = \frac{pl^3}{42EI} \Rightarrow \frac{(\Delta_o)_1}{(\Delta_o)_2} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

مثال (کنکور ارشد ۸۳): مقدار جابجایی نقطه C و لنگر M_A در تیر شکل زیر برابر است با:



$$-\frac{2pl}{5}, \frac{4pl^3}{3EI} \quad (2)$$

$$-\frac{pl}{2}, \frac{8pl^3}{15EI} \quad (1)$$

$$-\frac{4pl}{5}, \frac{pl^3}{2EI} \quad (4)$$

$$-\frac{2pl}{5}, \frac{4pl^3}{15EI} \quad (3)$$

حل ✓ می‌توان تیرهای AC و BC را معادل فنر در نظر گرفت و با توجه به تغییر مکان یکسان در نقطه C می‌دانیم که فنرها با هم موازیند
سپس:

$$k_{AC} = \frac{3 \times 2EI}{(2l)^3} = \frac{3EI}{4l^3}, \quad k_{BC} = \frac{3EI}{l^3} \Rightarrow k_C = k_{AC} + k_{BC} = \frac{15EI}{4l^3} \Rightarrow \Delta_C = \frac{p}{k_C} = \frac{4pl^3}{15EI}$$

- نیروی P به صورت نیروی برشی و به نسبت سختی‌های تیرها بینشان تقسیم می‌شوند:

$$V_{AC} = p \times \frac{k_{AC}}{k_C} = p \times \frac{\frac{3EI}{4l^3}}{\frac{15EI}{4l^3}} = \frac{p}{5} \Rightarrow M_A = (V_{AC})(2l) = \frac{2pl}{5}$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

نکته آخر:



شاید به جرأت بتوان گفت که درس تحلیل سازه‌ها تنها درسی است که اکثر مسائل آن را می‌توان از ۲ یا ۳ یا ۴ و روش متنوع و گوناگون حل نمود. به عنوان نکته آخر، به همه عزیزان توصیه می‌شود که تا جایی که امکان دارد مسائل تحلیل سازه‌ها را از ۲ یا ۳ روش حل و نتایج، راه‌حل‌ها و زمان‌ها را با هم مقایسه نمایند. با این شیوه هم تسلط خود را بر همه مباحث و روش‌ها افزایش داده‌اید و هم متوجه خواهید شد کدام روش‌ها در کدام مسائل (و با چه خواسته‌هایی) مناسب و راه‌گشا خواهند بود.