



تغییر شکل ها در سازه ها:

ابتدا به بررسی روش های محاسبه تغییر شکل ها در سازه ها می پردازیم:

- **روش بار واحد معین:** اگر سازه ای از N عضو تشکیل شده باشد، تحت یک بارگذاری خاص داریم:

$$1 \times \Delta (\text{یا } \theta) + W_R = \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{l_i} \frac{N_i n_i dx}{EA} + \int_{l_i} \frac{M_i m_i dx}{EI} + \int_{l_i} \frac{f_s V_i v_i dx}{GA} + \int_{l_i} \frac{T_i t_i dx}{GJ} \right\}$$

در رابطه بالا Δ (یا θ) تغییر مکان (یا چرخش) در نقطه مورد نظر سازه، W_R اثر نشست تکیه گاهی (که عبارتست از نشست تکیه گاه در سازه اصلی ضربدر مقدار عکس العمل تکیه گاهی در سازه بار واحد)، T_i, V_i, M_i, N_i به ترتیب نیروی محوری، لنگر خمشی، نیروی برشی و پیچش در عضو i ام در سازه اصلی و t_i, v_i, m_i, n_i همان کمیت ها در سازه بار واحد می باشند. f_s ضریب شکل در برش می باشد که برای مستطیل برابر است با $1/2$ و برای دایره $1/9$ می باشد.

- در تیرها و قاب ها، معمولاً به دلیل کوچکتر بودن صلبیت خمشی (EI) نسبت به صلبیت های برشی و محوری (EA, GA) (و در نتیجه بزرگتر بودن تغییر شکل های خمشی نسبت به تغییر شکل های برشی و محوری) از جملات در برگیرنده اثرات برشی و محوری صرف نظر می شود و فقط اثرات خمش و پیچش در نظر گرفته می شود.

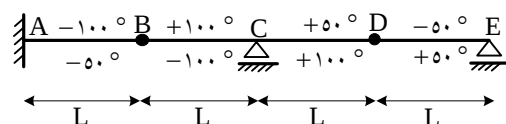
- در سازه معین بر اثر تغییر درجه حرارت، تغییر مکان داریم ولی تنش نداریم. که اثر تغییر درجه حرارت به صورت دو جمله که اثرات خمشی و محوری را در بردارند به جملات قبلی اضافه می شود:

$$\text{تغییر مکان در اثر تغییر درجه حرارت} = \sum_{i=1}^N \left\{ \underbrace{\int_{l_i} n_i \alpha \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right) dx}_{\text{اثر محوری}} + \underbrace{\int_{l_i} \frac{m_i (T_2 - T_1)}{h} dx}_{\text{اثر خمشی}} \right\}$$

که در این رابطه، T_0 دمای محیط، T_1 دمای تار بالای عضو و T_2 دمای تار پایین عضو، h ارتفاع مقطع عضو، α ضریب انتقال حرارتی مصالح عضو، m_i و n_i به ترتیب لنگر خمشی و نیروی محوری عضو در سازه بار واحد می باشند.

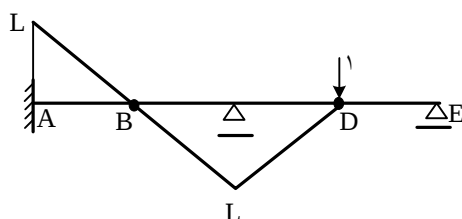


مثال) در سازه روبرو بر اثر تغییر درجه حرارت مقدار تغییر مکان قائم D چقدر است؟ ($T_0 = 0$ و $h = 0.2$)



(سازه اصلی)

در سازه بار واحد فقط لنگر خمشی داریم ($n = 0$)



(دیاگرام m ، لنگر خمشی در سازه بار واحد)



$$\begin{cases} M_{CD} = -1 \times x = -x \\ M_{BC} = 1(1-x) \\ M_{AB} = +1 \times x = x \end{cases}$$

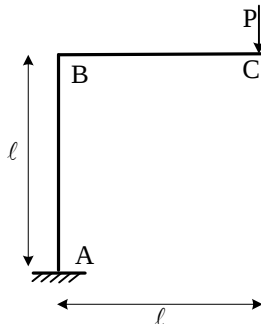
$$\Rightarrow 1 \times \Delta_D = \int_0^1 \frac{\alpha(-x)(100^\circ - 50^\circ)}{0.7} dx + \int_0^1 \frac{\alpha(1-x)(-100^\circ - 100^\circ)}{0.7} dx + \int_0^1 \frac{\alpha(x)(-50^\circ + 100^\circ)}{0.7} dx = 50 \cdot \alpha l^2$$

- در محاسبه انتگرال‌ها می‌توان از قضایا و روابط زیر جهت سهولت کار استفاده نمود:

- **قضیه مور:** مقدار انتگرال حاصلضرب لنگر خمشی سازه اصلی در سازه بار واحد برابر است با مساحت زیر نمودار لنگر خمشی سازه اصلی ضربدر مقدار لنگر در مرکز ثقل دیاگرام لنگر سازه بار واحد.

- حالت‌های زیر را به خاطر بسپارید:

لنگر در سازه اصلی	لنگر در سازه بار واحد	
		$= 1 \times A \times B \times l$
		$= \frac{1}{2} \times A \times B \times l$
		$= \frac{1}{2} \times A \times B \times l$
		$= \frac{1}{3} \times A \times B \times l$

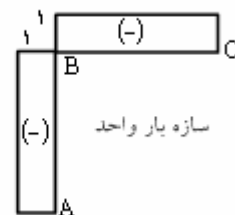
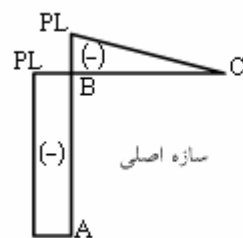


مثال) در سازه روبرو چرخش نقطه C را به دست آورید:



✓ حل نمودارهای لنگر خمشی در سازه اصلی و سازه بار

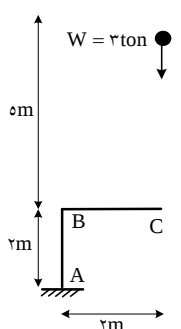
واحد (که ناشی از اعمال لنگر واحد در نقطه C است) به صورت زیر می‌باشد.



$$\theta_C = \frac{1}{2} \frac{(-Pl)(-1)l}{EI} + 1 \times \frac{(-Pl)(-1)l}{EI} = \frac{3}{2} \frac{Pl^2}{EI}$$

طبق روابط ذکر شده داریم:

- در مسائلی که بار به صورت ضربه ای وارد می‌شود، ابتدا باید تغییر مکان مربوطه را با فرض استاتیکی بودن بار محاسبه کرد (Δ_{st}) و



$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{\gamma g \Delta_{st}}}$$

سپس مقدار به دست آمده را در ضریب ضربه ضرب نمود:

که در این رابطه، h ارتفاع سقوط وزنه، V سرعت در لحظه برخورد و g شتاب ثقل می‌باشد.

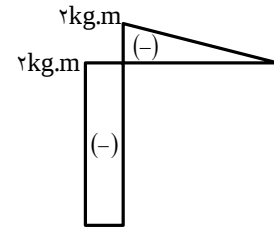
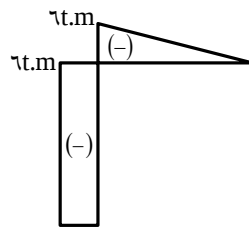
مثال) در سازه زیر اگر وزنه ۳ تنی از ارتفاع ۵ متری رها شود، مقدار تغییر مکان افقی نقطه B



را به دست آورید: ($EI = 2 \times 10^4 \text{ kg.cm}^2$)



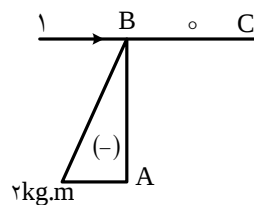
حل ✓ ابتدا باید نمودار لنگر سازه اصلی (بر اثر بار استاتیکی ۳ تنی روی نقطه C) و سازه بار واحد (بر اثر بار واحد روی نقطه C) را رسم و سپس مقدار ضریب ضربه را محاسبه نمود:



$$\Rightarrow (\Delta_{st})_C = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 1.0^5 \times 200 \times 200}{2 \times 1.0^4} + 1 \times \frac{6 \times 1.0^5 \times 200 \times 200}{2 \times 1.0^4} = 1/6 \text{ cm}$$

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{(\Delta_{st})_C}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{10 \times 100}{1/6}} = 26$$

حالا باید نمودار لنگر سازه بار واحد را (تحت اثر یک بار واحد افقی در نقطه B) رسم و از ضرب کردن آن در نمودار لنگر سازه اصلی



مقدار $(\Delta_{st})_B$ را به دست آورد.

$$\Rightarrow (\Delta_{st})_B = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{6 \times 1.0^5 \times 200 \times 200}{2 \times 1.0^4} = 0/6 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \beta \cdot (\Delta_{st})_B = 26 \times 0/6 = 15/6 \text{ cm}$$

- **قضیه اول کاستیلیانو:** اگر انرژی موجود در سازه بر حسب Δ و θ گره‌های سازه بیان شود داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_i} = M_i$$

- **قضیه دوم کاستیلیانو:** اگر انرژی موجود در سازه بر حسب نیروها (F_i) و لنگرهای (M_i) گره‌های سازه بیان شود داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i, \quad \frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i$$

که در روابط فوق، U انرژی سازه، F_i و M_i به ترتیب نیرو و لنگر گروه i ام سازه و Δ_i و θ_i به ترتیب، تغییر مکان و چرخش گره i ام سازه می باشند.

- استفاده از روابط سازگاری تغییر شکل‌ها، هم توصیه می شود. (به خصوص در سازه‌های نامعین). کلاً هرچه سازه نامعین تر باشد، تحلیل آن به روش‌های تغییر مکانی (روش‌هایی که در آنها ابتدا تغییر شکل‌ها به دست می آیند و از روی آنها مقدار نیروها و لنگرهای سازه به دست می آید) بهتر است، چون با افزایش درجات نامعین استاتیکی سازه، درجات آزادی سینماتیکی سازه (تعداد مجهولات تغییر مکانی) کاهش یافته و تحلیل سازه آسانتر خواهد شد. پس به عنوان توصیه، در مسائل نامعین، روش‌های سازگاری تغییر شکل‌ها و کاستیلیانو را به روش بار واحد ترجیح دهید.

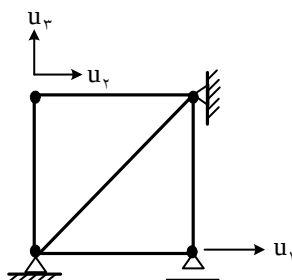
- در خرپای روبرو (برای مثال) سازه به لحاظ استاتیکی ۲ درجه (۲ مجهول) و به لحاظ سینماتیکی ۳ درجه (۳ درجه آزادی و ۳ مجهول) نامعین می باشد.

و کلاً در خرپاها داریم:

$$\text{در خرپاهای مسطح} \leftarrow n_c = 2j - r \quad (\text{درجه نامعینی سینماتیکی})$$

$$\text{در خرپاهای فضایی} \leftarrow n_c = 3j - r$$

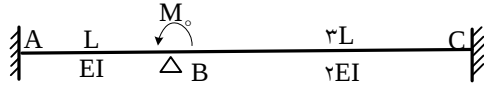
که در روابط فوق j تعداد گره‌های خرپا و r تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی می باشند.



- اگر عضو در انتهای اول به اندازه θ_1 و در انتهای دوم به اندازه θ_2 بچرخد و δ اختلاف تغییر مکان (عمود بر محور عضو) در دو سر آن باشد. انرژی موجودی در آن عبارتست از:

$$U = \frac{\frac{1}{2}EI}{l} (\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2) - \frac{\frac{1}{2}EI}{l^2} \delta (\theta_1 + \theta_2) + \frac{\frac{1}{2}EI}{l^3} \delta^2$$

مثال) در سازه روبرو مقدار چرخش گره B را به دست آورید:



مساله به لحاظ استاتیکی ۳ درجه نامعین است ولی به لحاظ سینماتیکی فقط یک درجه نامعین می باشد (چرخش گره B تنها درجه آزادی سازه است). ابتدا انرژی سازه را بر حسب مجهولات تغییر مکانی به دست می آوریم:



$$U_{AB} = \frac{\frac{1}{2}EI}{l} (\theta_B)^2, \quad U_{BC} = \frac{\frac{1}{2}EI}{3l} (\theta_B)^2 \Rightarrow U = \left(2 + \frac{1}{3}\right) \frac{EI}{l} \theta_B^2 = \frac{7}{3} \frac{EI}{l} \theta_B^2$$

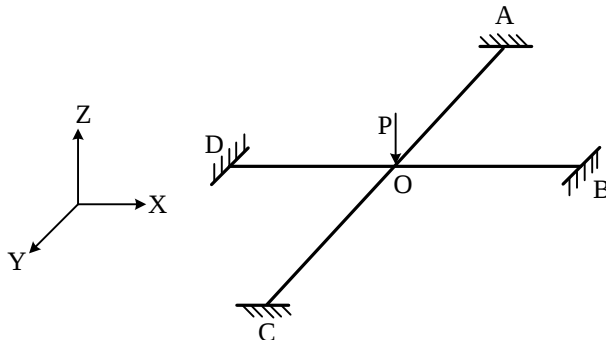
از قضیه اول کاستیلیانو داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = M_0 \Rightarrow \frac{2}{3} \frac{EI}{l} \theta_B = M_0 \Rightarrow \theta_B = \frac{3M_0 l}{2 \cdot EI}$$

مثال) در شبکه مقابل درجات آزادی و مقدار آنها را به دست آورید: (طول اعضا l و GJ و EI)



حل) شبکه به سازه افقی می گویند که تمام نیروهای آن عمود بر سازه می باشد. در این شبکه به علت تقارن موجود در سازه، هیچ دورانی نداریم و اعضاء دچار پیچش هم نمی شوند.

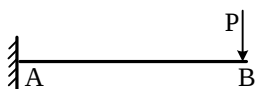


تنها درجه آزادی سازه، تغییر مکان نقطه O در راستای Z می باشد. پس:

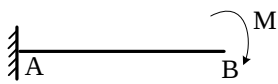
$$U_{OA} = U_{OB} = U_{OC} = U_{OD} = \frac{\frac{1}{2}EI}{l^3} \Delta_o^2 \Rightarrow U = 4 \times \frac{\frac{1}{2}EI}{l^3} \Delta_o^2 = \frac{2EI}{l^3} \Delta_o^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_o} = P \Rightarrow \Delta_o = \frac{Pl^3}{48EI}$$

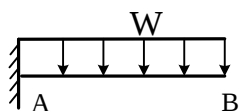
- اشکال و روابط زیر را حتماً به خاطر بسپارید:



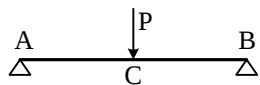
$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{3EI}, \quad \theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$



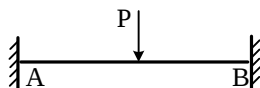
$$\Delta_B = \frac{Ml^2}{2EI}, \quad \theta_B = \frac{Ml}{EI}$$



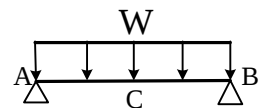
$$\Delta_B = \frac{Wl^4}{8EI}, \quad \theta_B = \frac{Wl^3}{6EI}$$



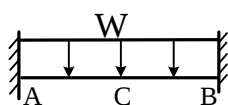
$$\Delta_C = \frac{Pl^3}{48EI}, \quad \theta_A = \theta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$$



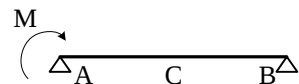
$$\Delta_C = \frac{Pl^3}{192EI}, \quad M_A = M_B = M_C = \frac{Pl}{8}$$



$$\Delta_C = \frac{5Wl^4}{384EI}, \quad \theta_A = \theta_B = \frac{Wl^3}{24EI}$$



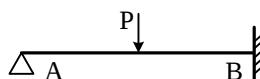
$$\Delta_C = \frac{Wl^4}{384EI}, \quad M_A = M_B = 2M_C = \frac{Wl^2}{12}$$



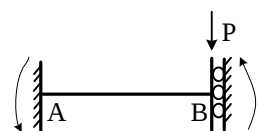
$$\Delta_C = \frac{Ml^3}{16EI}, \quad \theta_A = 2\theta_B = \frac{Ml}{3EI}$$



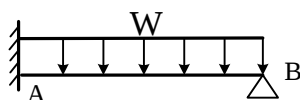
$$\theta_A = \frac{Ml^2}{6EI}, \quad M_B = \frac{M}{2} \text{ (در جهت M)}$$



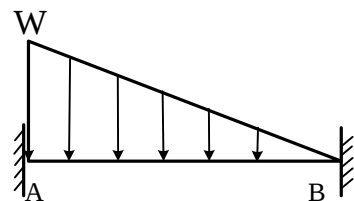
$$\theta_A = \frac{Pl^2}{24EI}, \quad M_B = \frac{Pl}{16}$$



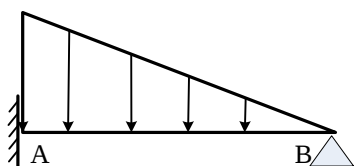
$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{12EI}$$



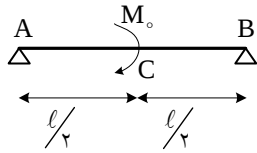
$$\theta_B = \frac{Wl^3}{48EI}, \quad M_A = \frac{Wl^2}{8}$$



$$M_A = \frac{Wl^2}{20}, \quad M_B = \frac{Wl^2}{30}$$



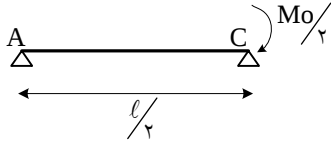
$$M_A = \frac{Wl^2}{15}$$



مثال) مطلوبست θ_A در سازه مقابل:

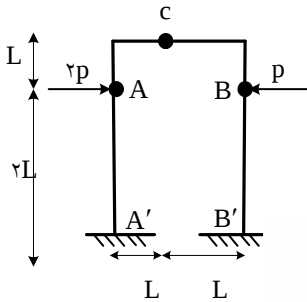


حل ✓ از آنجا که شکل متقارن است، می‌توان نیمی از آن را تحلیل نمود:
و با توجه به روابط ذکر شده θ_A در این حالت برابر است با:



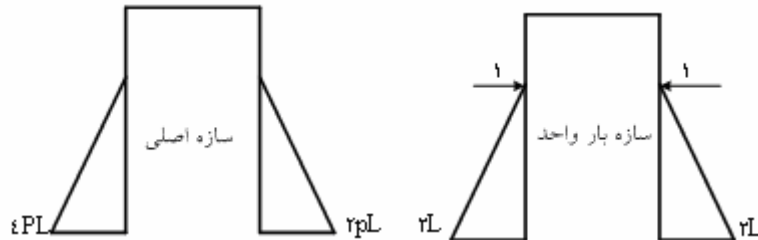
$$\theta_A = \frac{Ml}{6EI} = \frac{\left(\frac{M_o}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{6EI} = \frac{M_o l}{24EI}$$

مثال) (کنکور ارشد ۸۳): مقدار نزدیک شدن دو نقطه A و B در سازه زیر برابر است با:



$$\frac{pl^3}{3EI} \quad (1) \quad \frac{4pl^3}{EI} \quad (2) \quad \frac{2pl^3}{3EI} \quad (3) \quad \frac{2pl^3}{EI} \quad (4)$$

سازه معین است و پس از تحلیل داریم: (روش بار واحد معین)



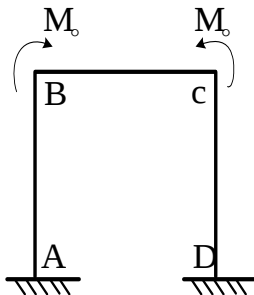
$$\Delta_{A \rightarrow B} = \frac{1}{3} \times \frac{2pl \times 2l}{EI} \times 2l + \frac{1}{3} \times \frac{2pl \times 2l}{EI} \times 2l = \frac{8pl^3}{EI}$$

راه حل ساده تر: از همان ابتدا مشخص است که اعضای BC و AC صفر نیرویی اند و در نتیجه اعضای AA' و BB' بصورت تیر طره

عمل می‌کنند. با استفاده از رابطه معروف $\Delta = \frac{pl^3}{3EI}$ برای تیرهای طره داریم:

$$\Delta = \Delta_{AA'} + \Delta_{BB'} = \frac{(2p)(2l)^3}{3EI} + \frac{(p)(2l)^3}{3EI} = \frac{24pl^3}{3EI} = \frac{8pl^3}{EI}$$

مثال) در سازه روبرو θ_B را به دست آورید: (از تغییر طول محوری اعضاء صرف نظر شود)

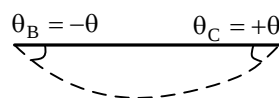


حل ✓ با استفاده از تقارن می‌دانیم تیر BC بصورت زیر خم می‌شود و چرخش دو سر آن

با هم برابر ولی در خلاف جهت هم و تغییر مکان دو سر آن نسبت به هم صفر است. و

با توجه به صلب بودن گره‌های B و C، میزان چرخش این گره‌ها در اعضای AB و CD

هم همین مقادیر را دارد.





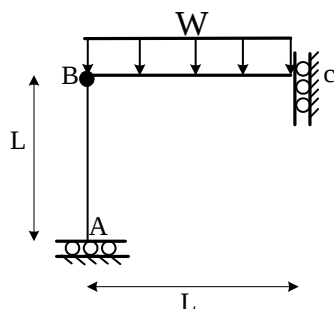
$$U_{AB} = \frac{\gamma EI}{1} (\theta_B)^2 = \frac{\gamma EI}{1} (-\theta)^2$$

$$U_{BC} = \frac{\gamma EI}{1} (\theta_B^2 + \theta_B \theta_C + \theta_C^2) = \frac{\gamma EI}{1} ((-\theta)^2 + (-\theta)(+\theta) + \theta^2)$$

$$U_{CD} = \frac{\gamma EI}{1} (\theta_C)^2 = \frac{\gamma EI}{1} \theta^2 \Rightarrow U = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = 3 \times \frac{\gamma EI}{1} \theta^2 = \frac{6EI}{1} \theta^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 2M_o \Rightarrow \frac{12EI}{1} \theta = 2M_o \Rightarrow \theta = \frac{M_o l}{6EI}$$

مثال (کنکور ارشد ۸۴) در قاب شکل مقابل صلبیت خمشی اعضا EI می باشد دوران سمت راست مفصل B چقدر است؟



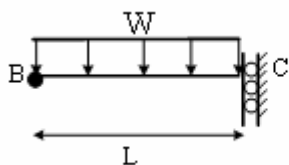
$$\frac{wl^3}{2EI} \quad (2)$$

$$\frac{wl^3}{6EI} \quad (4)$$

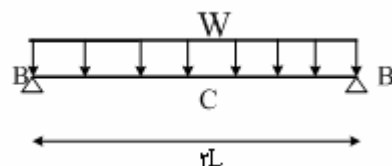
$$\frac{wl^3}{3EI} \quad (1)$$

$$\frac{wl^3}{4EI} \quad (3)$$

حل با کمی دقت مشخص می شود، لنگر خمشی عضو AB صفر است در نتیجه به جای سازه فوق می توان سازه زیر را تحلیل نمود:

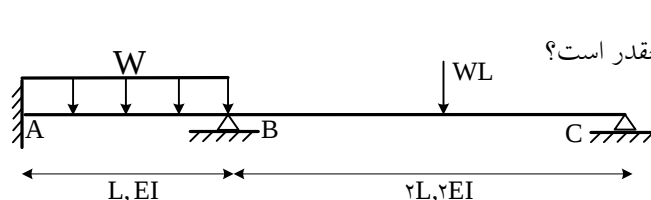


با استفاده از تقارن



$$\Rightarrow \theta_B = \frac{W(2L)^3}{24EI} = \frac{WL^3}{3EI}$$

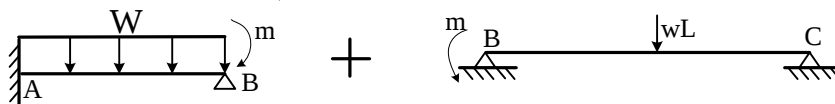
گزینه ۱ صحیح است.



مثال (در سازه مقابل) چقدر است $\left| \frac{\theta_C}{\theta_B} \right|$ ؟



حل سازه را تفکیک کرده و معادلات سازگاری شیب را در گره B می نویسیم (لنگر در گره B را مجهول فرض می کنیم):



$$AB: \theta_B = \frac{Wl^3}{48EI} - \frac{ml}{4EI}$$

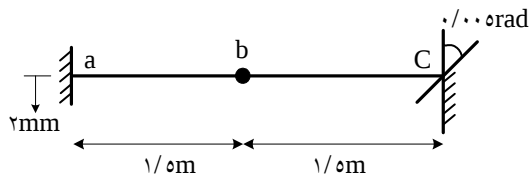
$$BC: \theta_B = \frac{m(2l)}{2(2EI)} - \frac{(Wl)(2l)^2}{16(2EI)} = \frac{ml}{2EI} - \frac{Wl^3}{8EI} \Rightarrow \frac{Wl^3}{48} - \frac{ml}{4} = \frac{ml}{2} - \frac{Wl^3}{8} \Rightarrow \frac{\gamma}{48} Wl^3 = \frac{\gamma}{12} m \Rightarrow m = \frac{Wl^3}{4}$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{ml}{2EI} - \frac{Wl^3}{8EI} = \frac{wl^3}{12EI} - \frac{Wl^3}{8EI} \Rightarrow |\theta_B| = \frac{Wl^3}{24EI}$$

$$\theta_C = \frac{m(2l)}{6(2EI)} - \frac{(wl)(2l)^2}{16(2EI)} = \frac{Wl^3}{4 \times 6EI} - \frac{Wl^3}{8EI} \Rightarrow |\theta_C| = \frac{Wl^3}{12EI} \Rightarrow \left| \frac{\theta_C}{\theta_B} \right| = 2$$



مثال (کنکور ارشد ۸۳): در تیر شکل مقابل تحت نشست و چرخش تکیه گاهی نشان داده شده M_{ab} بر حسب $kg.m$ کدام است؟



$$EI = 135 \text{ ton.m}$$

(۲) ۴۹۵

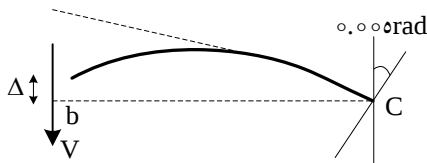
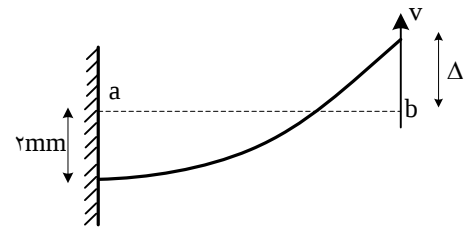
(۱) ۴۰۵

(۴) ۹۴۵

(۳) ۸۵۵

حل این مثال به روش شیب افت قابل حل است که بسیار طولانی می باشد. نیروی برشی را در طرفین مفصل، V فرض کنیم. با فرض جابجا شدن مفصل b به اندازه دلخواه به طرف بالا (میتوانیم به طرف پایین هم فرض کنیم) خواهیم داشت:

$$ab: \frac{Vl^3}{3EI} = \Delta + 0.002 \Rightarrow \frac{V \times 1.5^3}{3 \times 135} = \Delta + 0.002 \quad (1)$$



$$bc: l\theta - \frac{Vl^3}{3EI} = \Delta \Rightarrow 1.5 \times 0.005 - \frac{V \times 1.5^3}{3 \times 135} = \Delta \quad (2)$$

با حذف Δ از طرفین داریم:

$$\frac{V \times 1.5^3}{3 \times 135} - 0.002 = 1.5 \times 0.005 - \frac{V \times 1.5^3}{3 \times 135} \Rightarrow V = 0.57 \text{ ton} = 570 \text{ kg} \Rightarrow M_{ab} = vl = 570 \times 1.5 = 855 \text{ kg.m}$$

گزینه ۳ صحیح است.